第 33 講　最短経路

33　図のような碁盤の目状の道路がある．S 地点を出発して，道路上を東または北に進んで G 地点に到達する経路を考える（図 1 の太線はそのような経路の一例である）．

(1)　S 地点から G 地点に至る経路は何通りあるか．

(2)　S 地点から G 地点に至る経路のうち，図 2 の A 地点と B 地点をともに通る経路は何通りあるか．

(3)　図 3 の a，b の 2 か所が通行止めのとき，S 地点から G 地点に至る経路は何通りあるか．

(4)　図 4 の α，β の 2 か所が通行止めのとき，S 地点から G 地点に至る経路は何通りあるか．

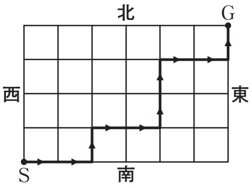


図 1

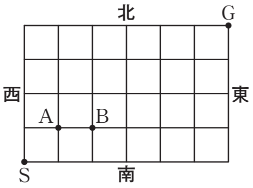


図 2

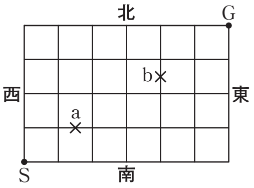


図 3

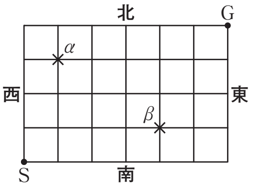


図 4

< Note >

第33講　最短経路

33　図1のような道路がある．A地点を出発して，道路上を東または北または北東に進んでB地点に到達する経路を考える（図2の太線はそのような経路の一例である）．

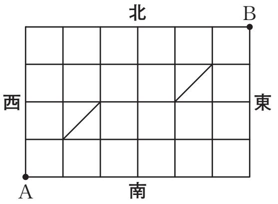


図1

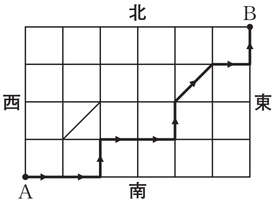


図2

A地点からB地点に至る経路は何通りあるか求めよ．

【選択肢】

㋐　274通り　　㋑　270通り　　㋒　266通り

＜ Note ＞

第 33 講　最短経路

33　図のような碁盤の目状の道路がある．S 地点を出発して，道路上を東または北に進んで G 地点に到達する経路を考える（図 1 の太線はそのような経路の一例である）．

(1)　S 地点から G 地点に至る経路は何通りあるか．

(2)　S 地点から G 地点に至る経路のうち，図 2 の A 地点と B 地点をともに通る経路は何通りあるか．

(3)　図 3 の a，b の 2 か所が通行止めのとき，S 地点から G 地点に至る経路は何通りあるか．

(4)　図 4 の α，β の 2 か所が通行止めのとき，S 地点から G 地点に至る経路は何通りあるか．

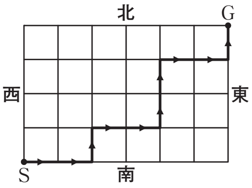


図 1

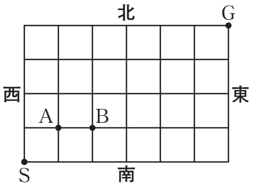


図 2

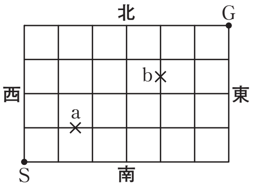


図 3

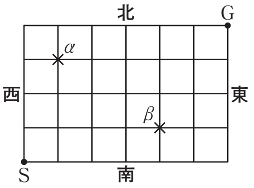


図 4

【答】　(1) 210 通り　(2) 70 通り　(3) 113 通り　(4) 136 通り

【解答】

(1)　東へ 6 区画，北へ 4 区画移動するので 10 回の移動の中で，北へ移動するところを考えると

$$ {}_{10}C_4=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} $$

$$ =\mathbf{210}\ \textbf{（通り）} $$

(2)　(1)と同様に考えると，S から A への経路は ${}_2C_1$ 通り，A から B への経路は 1 通り，B から G への経路は ${}_7C_3$ 通りであるから

$$ {}_2C_1\times{}_1C_1\times{}_7C_3=2\times 1\times\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} $$

$$ =\mathbf{70}\ \textbf{（通り）} $$

(3)　a を通るのは(2)より 70 通り．b を通るのは

$$ {}_6C_2\times{}_1C_1\times{}_3C_1=\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}\times 1\times 3=45\ \text{（通り）} $$

a と b の両方を通るのは

$$ {}_2C_1\times{}_1C_1\times{}_3C_1\times{}_1C_1\times{}_3C_1=18\ \text{（通り）} $$

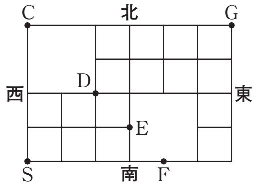
以上より a または b を通るのは

$$ 70+45-18=97\ \text{（通り）} $$

となるので，a，b の 2 か所を通らないのは

$$ 210-97=\mathbf{113}\ \textbf{（通り）} $$

(4)　α と β が通行止めなので，図のような経路を考え，C，D，E，F を図のように定めると，C，D，E，F のどれかを経由すると，このうちの他の 3 点のどこも経由しないことがわかる．



　このとき

C 経由の経路は 1 通り

D 経由の経路は ${}_4C_2\times{}_6C_2=90$（通り）

E 経由の経路は ${}_4C_1\times{}_5C_2=40$（通り）

F 経由の経路は $1\times{}_5C_1=5$（通り）

となるので，求める経路は $1+90+40+5=$ **136（通り）**

≪別解≫

(4)　α を経由するものは ${}_4C_1\times{}_6C_1=24$（通り），β を経由するものは ${}_5C_1\times{}_5C_2=50$（通り）であるので，(1)の 210 通りからこの 2 つの経由した経路を除くと

$$210-24-50=\mathbf{136}\text{（通り）}$$

となる．

第 33 講　最短経路

33　図 1 のような道路がある．A 地点を出発して，道路上を東または北または北東に進んで B 地点に到達する経路を考える（図 2 の太線はそのような経路の一例である）．

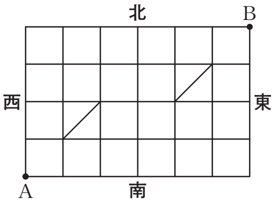


図 1

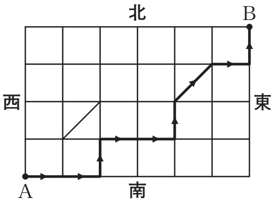


図 2

A 地点から B 地点に至る経路は何通りあるか求めよ．

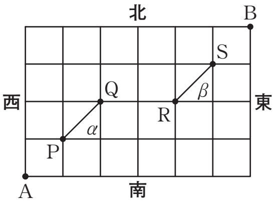
【選択肢】

㋐　274 通り　　㋑　270 通り　　㋒　266 通り

【答】　㋐

【解答】

図のように点 P，Q，R，S を定め，P から Q へ向かう北東の道を α，R から S へ向かう北東の道を β とする．



(Ⅰ)　α，β を両方通らない経路は

東に 6 回，北に 4 回移動する場合だけ考えればよいので，${}_{10}C_4=210$（通り）

(Ⅱ)　α を通り，β を通らない経路は

A から P までは東に 1 回，北に 1 回移動するので，${}_2C_1=2$（通り），P から Q までは 1（通り），Q から B までは東に 4 回，北に 2 回移動するので，${}_6C_2=15$（通り）であるから，$2\times1\times15=30$（通り）

(Ⅲ)　β を通り，α を通らない経路は

対称性より(Ⅱ)と同様に 30 通り．

(Ⅳ)　α，β の両方を通る経路は

A から P までは東に 1 回，北に 1 回移動するので，${}_2C_1=2$（通り），P から Q までは 1（通り），Q から R までは 1（通り），R から S までは 1（通り），S から B までは東に 1 回，北に 1 回移動するので，${}_2C_1=1$（通り）であるから，$2\times1\times1\times1\times2=4$（通り）

以上より求める経路は　$210+30+30+4=$**274（通り）**